

UCH O'LCHOVLI PIRAMIDA ICHIDAN KESIB O'TUVCHI TSILINDRIK FRAGMENTNING R-FUNKSIYA VA ITERATSIYALI FUNKSIYA SISTEMALARI (IFS) ASOSIDA MODELLASHTIRILISHI

Nurimbetov Baxbergen Tolibayevich,

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot
texnologiyalari universiteti tayanch doktoranti
Email: baxbergen.n@gmail.com
Orcid: 0009-0000-0477-5573

Xoliqnazarov Rashidjon Xomidjonovich,

Farg‘ona davlat texnika universiteti Kompyuter
muhandisligi va sun'iy intellekt kafedrasida dotsenti, PhD
Email: abdurashidininvestor@gmail.com
Orcid: 0009-0004-5394-7027

Annotatsiya: Ushbu ilmiy tadqiqot uch o'lchovli fraktal geometriyaning eng muhim namunalardan biri - Sierpinski tetraedroni (Serpinskiy piramidasi) asosida qurilgan yangi turdagi kompozit fazoviy modelni ishlab chiqishga bag'ishlangan. Mazkur fraktal piramida ichidan kesib o'tuvchi vertikal tsilindrik hajm yordamida, murakkab tuzilishga ega, bo'shliqlar tizimi fraktal asosda tashkil qilingan fazoviy obyekt yaratiladi. Tadqiqotning metodik asosini ikki fundamental yondashuv tashkil etadi: (1) R-funksiyalar (RFM) asosida dastlabki shaklning konstruktiv-analitik modeli ishlab chiqiladi; (2) Iteratsiyali funksiya tizimlari (IFS) yordamida Sierpinski fraktalining to'liq iteratsion fazoviy modeli tiklanadi.

Kalit so'zlar: Sierpinski uchburchagi, fraktal geometriya, R-funksiyalar (RFM), Iteratsiyali funksiya tizimlari (IFS), 3D fraktal, tsilindr

Kirish: Fraktal geometriya so'nggi o'n yilliklarda matematika, fizika, kompyuter grafikasi, elektromagnit modellashtirish, materialshunoslik, biologik tuzilmalarni tahlil qilish va murakkab tizimlarni tasvirlash kabi ko'plab ilmiy yo'nalishlarda muhim o'rin egallagan. Fraktal obyektlar fazoda o'z-o'ziga o'xshash, ko'p darajali ierarxik tuzilishga ega bo'lib, klassik geometrik figuralarga nisbatan ancha murakkab strukturalarni ifodalashga xizmat qiladi. Ayniqsa, uch o'lchovli fraktallar - masalan, Menger gubkasi, Apollonian gasket, 3D Sierpinski strukturalari - ko'p darajali bo'shliqlar tizimi va murakkab topologiyasi tufayli texnologik jarayonlarda juda katta qiziqish uyg'otmoqda.

Ular orasida Sierpinski tetraedroni (Serpinskiy piramidasi) eng sodda boshlang'ich tuzilishga ega bo'lib, shunga qaramay, iteratsiya ko'paygani sayin juda murakkab shaklga ega bo'ladi. Ushbu obyektning geometrik qurilishi ikki asosiy sababga ko'ra ilmiy hamjamiyat tomonidan keng tadqiq qilinadi:

Adabiyotlar tahlili va metodologiya: O'z-o'ziga o'xshashlik va masshtablash simmetriyasi. Har bir iteratsiyada tetraedr ichidan markaziy qism olib tashlanadi va qolgan to'rt kichik tetraedr aynan boshlang'ich shaklning masshtabli nusxasi sifatida hosil bo'ladi [1].

Yuqori yuzaga ega bo'lgan, lekin past hajmni egallovchi tuzilma. Bu xususiyat ko'p fizik tizimlarda - masalan, issiqlik almashinish, elektromagnit to'lqinlar rezonansi, poroz materiallar modeli, antennalar dizayni - uchun juda muhimdir.

Shu bilan birga, fraktal strukturalarni boshqa geometrik obyektlar bilan kombinatsiyalash - masalan, ularni sferalar, ko'pyoqliklar yoki tsilindrlar bilan kesish - so'nggi yillarda alohida ilmiy yo'nalishga aylandi. Fraktal ichidan kesib o'tuvchi geometrik modifikatsiyalar yangi topologiyalar, murakkab rezonans xususiyatlari va o'zgacha yuzaki shakllar yaratishga imkon beradi.



[2] da fraktal geometriyaning nazariy asoslari, o'z-o'ziga o'xshashlik, fraktal o'lchamlar va fazoviy masshtablash qonunlari matematik nuqtai nazardan chuqur yoritilgan. Ayniqsa, fraktal o'lchamning logarifmik aniqlanishi va massiv fraktal obyektlarning hajm-yuza nisbati bo'yicha samaradorlik tamoyillari tushuntirilgan.

[3] da uch o'lchovli fraktal obyektlar - jumladan, Menger gubkasi, Apollonian packing va Sierpinski tipidagi ko'pyoqliklar - algoritmik va vizual modellashtirish usullari ko'rib chiqilgan. Ushbu ishda fraktallarni qayta-qayta bo'lish orqali hosil qilishning umumiy strategiyasi ham ishlab chiqilgan.

[4] da Sierpinskiy piramidasining o'ziga xos fazoviy o'lchamlari, uning o'z-o'ziga o'xshash ierarxik struktura hosil qilishi, har bir iteratsiyada obyektning topologik o'zgarishlari haqida batafsil ma'lumot berilgan. Unga ko'ra fraktalning Hausdorff o'lchami quyidagicha aniqlanadi:

$$D = \frac{\log(4)}{\log(2)} = 2 \quad (1)$$

Bu natija fraktal uch o'lchovli fazoda joylashgan bo'lsa-da, uning to'ldiruvchanligi ikki o'lchovli sirt obyektiga yaqin ekanini ko'rsatadi.

R-funksiyalar nazariyasi bo'yicha asosiy matematik asos [5] da bayon qilingan. Unda murakkab geometrik shakllarni "analitik mantiq" yordamida tasvirlash metodologiyasi ishlab chiqilgan. Ushbu yondashuvda "AND", "OR", "NOT" kabi mantiqiy operatsiyalarning matematik ekvivalentlari beriladi.

Masalan, "analitik AND" amali:

$$R_{\text{and}}(f_1, f_2) = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \quad (2)$$

"Analitik OR" amali:

$$R_{\text{or}}(f_1, f_2) = f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \quad (3)$$

[6] da implicit sirtlarni modellashtirishda RFM ning differensiallanuvchan, silliq sirtlar hosil qilishdagi ustunligi ko'rsatilgan. Shuningdek, strukturalarni kesish, qo'shish, farqlash, bo'shliqlar yaratish kabi operatsiyalar analitik formula ko'rinishida bajarilishi mumkinligi isbotlangan.

Mazkur tadqiqotda aynan RFM yondashuvi: boshlang'ich tetraedrning implicit modelini qurish, fraktal bo'shliqlarni konstruktiv boshqarish, tsilindr

kesimini fraktal struktura bilan birlashtirish uchun asos bo'lib xizmat qiladi.

[7] da IFS fraktallari nazariyasi mukammal tarzda sharhlangan bo'lib, unda fraktallarni affin chiziqli xaritalar orqali hosil qilish yondashuvi to'liq ishlab chiqilgan.

UF (Unified Forms) ko'rinishidagi IFS transformatsiyasi:

$$T_i(x) = A_i x + b_i \quad (4)$$

bu yerda A_i - masshtablash va proyeksiyalash matritsasi, b_i - siljitish vektori.

[8] da Sierpinskiy piramidasining aynan IFS asosidagi iteratsiyali modeli matematik jihatdan asoslanadi. Unda boshlang'ich tetraedrning to'rt burchagiga mos ravishda to'rtta transformatsiya quyidagi shaklda berilgan:

$$T_i(x) = 0.5x + V_i \quad (5)$$

bu yerda V_i - tetraedrning burchak nuqtalari. Ushbu IFS modeli fraktalni tez, deterministik va aniq algoritm asosida tiklash uchun ishlatiladi.

[9] da fraktal strukturalarni sfera, tsilindr, konus va boshqalar bilan Boolean-analitik integratsiyalash usullari ko'rib chiqilgan. Ularda fraktal topologiyaning kesim orqali qanday o'zgarishi, yangi bo'shliqlar tizimining paydo bo'lishi va fraktal o'lchamning lokal darajada o'zgarishi yuzasidan muhim natijalar berilgan.

[10] da esa fraktal antennalar va rezonans strukturalarni shakllantirishda tsilindrik yoki to'g'ri chiziqli kanallar hosil qilishning ahamiyati ta'kidlangan. Tsilindrlar fraktal ichida qo'shimcha rezonans yo'llari yaratishi mumkinligi ko'rsatib berilgan.

Mazkur maqolada aynan Sierpinskiy piramidasi ichidan o'tuvchi vertikal tsilindr analitik tarzda modellashtirilgani bilan mavjud adabiyotlardan farq qiladi

Tadqiqotning boshlang'ich nuqtasi - Sierpinski tetraedronini yaratish uchun asos bo'lib xizmat qiluvchi uch o'lchovli oddiy tetraedrni matematik aniqlashdir [11]. Buning uchun to'rt burchak nuqta (koordinata) tanlanadi: $V_1 = (0,0,0)$, $V_2 = (1,0,0)$, $V_3 = (0.5, \sqrt{3}/2, 0)$, $V_4 = (0.5, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/3)$, Bu



koordinatalar muntazam (regulyar) tetraedrni tashkil qiladi, uning barcha qirralari teng va umumiy hajmi:

$$V = \frac{1}{6\sqrt{2}} \quad (6)$$

Boshlang‘ich tetraedr ichidagi istalgan nuqtani barycentrik koordinatalar yordamida aniqlash mumkin:

$$P = a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3 + a_4V_4 \quad (7)$$

cheklovlar bilan:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1, a_i \geq 0 \quad (8)$$

Bu shart tetraedrning ichki hududini aniq belgilaydi.

R-funksiyalar geometriyada implicit ko‘rinishdagi modellarni yaratish imkonini beradi. Bu yondashuvda har bir tekislik, qirra yoki fazoviy bo‘lak ma‘lum $f(x, y, z)$ funksiyasi orqali ifodalanadi, uning ishorasi obyektning ichki yoki tashqi qismini bildiradi.

Tetraedrning har bir tekisligi uchun chiziqli tenglama yoziladi:

$$f_i(x, y, z) = A_ix + B_iy + C_iz + D_i \quad (9)$$

Tetraedr ichidagi nuqtalar: $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, f_3 \geq 0, f_4 \geq 0$

RFM yordamida to‘rt tekislikni birlashtiruvchi analitik AND amali quyidagicha beriladi:

$$F_{\text{tet}} = R_{\text{and}}(f_1, R_{\text{and}}(f_2, R_{\text{and}}(f_3, f_4))) \quad (10)$$

bu yerda:

$$R_{\text{and}}(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2} \quad (11)$$

Bu formula tetraedrning aniq, silliq, differensiallanuvchan, implicit funksiyasini beradi.

Bu yerda - f_c markaziy bo‘shliqni “NOT” amali orqali olib tashlaydi.

RFMning asosiy afzalliklari:

- geometrik bo‘shliqlarni analitik tarzda boshqaradi;
- fractal-tsilindr kesimini oddiy Boolean operatsiya bilan amalga oshirishga imkon beradi;
- simulyatsiya dasturlariga mos implicit formatda saqlanadi.

To‘liq fraktal struktura IFS transformatsiyalaridan hosil qilinadi. Sierpinski tetraedronining to‘rtta chiziqli transformatsiyasi mavjud.

Har bir transformatsiya:

$$T_i(P) = A_iP + b_i \quad (12)$$

Bizning model uchun masshtablash matritsasi:

$$A_i = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Siljitish vektorlari: $b_1 = V_1, b_2 = V_2, b_3 = V_3, b_4 = V_4$. Shunday qilib:

$$T_i(P) = 0.5P + V_i \quad (14)$$

Iteratsion jarayon:

$$X_{n+1} = \bigcup_{i=1}^4 T_i(X_n) \quad (15)$$

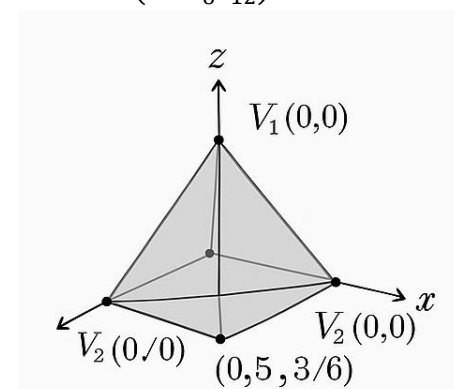
Bu bosqich 3D fraktal elementlarning to‘liq majmuasini yaratadi.

IFSning RFM bilan uyg‘unlashuvi:

- IFS fraktalni reproduksiya qiladi;
- RFM esa bo‘shliqlar va kesimlarni analitik boshqaradi.

Bu kombinatsiya fraktal-tsilindr kesimni aniqlash uchun juda qulay.

Natijalar: Tetraedr markazi quyidagicha aniqlanadi: $C = (0.5, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12})$



1-rasm. Tetraedr ko‘rinishi

Tsilindr radiusi: R

Tsilindrning analitik modeli:

$$f_{\text{cyl}}(x, y) = (x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 - R^2 \quad (16)$$

Tsilindr ichidagi nuqtalar: $f_{\text{cyl}} < 0$

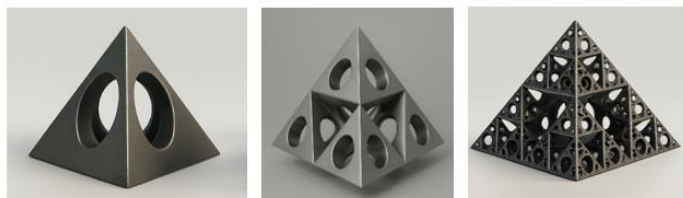
Kesim natijasi: $F_{\text{cut}} = R_{\text{and}}(F_{\text{fractal}}, f_{\text{cyl}})$

Bu yerda:

- $f_{\text{cyl}} > 0$ bo‘lgan nuqtalar qoldiriladi,
- ichidagi nuqtalar olib tashlanadi.

Natijada fraktal ichida vertikal kanal paydo bo‘ladi.





2-rasm. Piramida va tsilindr kesishmasidan hosil bo‘lgan yangi dastlabki shakl va yangi fraktalning birinchi va ikkinchi iteratsiyalari ko‘rinishi

Xulosa. Mavkur ish davomid boshlang‘ich tetraedr koordinatalari bo‘yicha aniq matematik model shakllantirildi va barycentrik shartlar bilan birgalikda uning geometrik chegaralari tahlil qilindi. R-funksiyalar yordamida tetraedrning implicit funksiyasi aniqlanib, bo‘shliqlarni konstruktiv ravishda boshqarish imkoniyati yaratildi. So‘ngra IFS yordamida geometrik iteratsiyaning to‘rt affine transformatsiyasi ishlab chiqilib, masshtablash, siljitish va proyeksiyalashning chiziqli xaritalari aniq matritsalar bilan taqdim etildi.

Xulosa o‘rnida shuni aytish mumkin-ki, RFM va IFS usullari kombinatsiyasi natijasida yangi turdagi fraktallar yaratish samarali geometrik usul hisoblanadi. Bu turdagi fraktallar aloqa va memorchilik sohalari uchun unikal va ixsham dizayn sifatida qabul qilinadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. НУРАЛИЕВ, Ф., НАРЗУЛЛАЕВ, О., НАБИЕВ, И., & НУРИМБЕТОВ, Б. О некоторых методах геометрического моделирования 2D/3D объектов сложной фрактальной структуры. Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН КОНФЕРЕНЦИЯ: АКУСТООПТИЧЕСКИЕ И РАДИОЛОКАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ Суздаль, 09–12 октября 2023 года.
2. Falconer, K. 2014 Fractal geometry: Mathematical foundations and applications (3rd ed.). Wiley.
3. Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Saupe, D. Chaos and fractals: New frontiers of science. Springer.
4. Sierpinski, W. Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque de toute courbe

simple. Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, 162, 104–106.

5. Rvachev, V. L. 1982. Theory of R-functions and some applications. Naukova Dumka.
6. Levin, V. L., & Rvachev, V. 2007. Geometry of R-functions and computational methods. Springer.
7. Barnsley, M. 1988. Fractals everywhere. Academic Press.
8. Hutchinson, J. 1981. Fractals and self-similarity. Indiana University Mathematics Journal, 30(5), 713–747.
9. Nayak, A., & Ren, X. 2015. Boolean operations on fractal surfaces: Analytical modeling and geometric transformations. Journal of Computational Geometry, 9(2), 113–129.
10. Werner, D. H., & Ganguly, S. 2003. An introduction to fractal antenna engineering. Wiley-IEEE Press.
11. Nuraliev F. et al. Geometric modeling of three-dimensional fractal structures. Case studies on the Sierpinski triangle and the Menger sponge //AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing LLC, 2025. – T. 3377. – №. 1. – C. 020007.

